Lección n°1: Conceptos preliminares de topología. EPN, 2021

Esta lección preliminar es un breve repaso de los principales conceptos en topología que se usan en las siguientes lecciones, el lector puede omitir esta lección, y referirse luego a ella, si ya conoce las nociones básicas (como son la topología de subespacio y la topología producto) de la materia.

Las lecturas recomendadas y complementarias, para el lector con pocos conocimientos de topología o interesado en profundizar, son:

- Los primeros tres capítulos y el noveno, del libro "Topology", segunda edición, de James R. Munkres. o los primeros 5 capítulos del libro "Essential Topology" de Martin Crossler.
- Como una referencia más compacta y general, se puede consultar también el apéndice A del libro "Introduction to smooth manifolds", segunda edición, de John M. Lee.

Empezamos nombrando la herramienta más simple que hay para construir una función continua a partir de otras.

Lema 0.1 (Lema de pegado). *Sean X y Y dos espacios topológicos tales que se cumplan cualesquiera de las siguientes condiciones:*

- *Existen finitos $A_1, \dots, A_n$, conjuntos cerrados en X, tal que su unión es X.*
- *$\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia indexada (no necesariamente finita) de conjuntos abiertos en X, tal que su unión es X.*

Adicionalmente, si para cada índice, existen funciones continuas

$$f_i : A_i \to Y,$$

tales que son iguales donde coinciden; esto es: $f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j}$ para todo par de índices i y j. Entonces existe una única función continua $f : X \to Y$ tal que

$$f|_{A_i} = f_i$$

para todo índice i.

Ejercicio 0.1. *Demuestre el anterior lema. Pista: Notar que las funciones f_i son iguales en donde coinciden, por tanto la función dada por la regla $f(x) = f_i(x)$ si $x \in A_i$, está bien definida. ¿Por qué es continua? ¿Qué sucede si consideramos una familia infinita de conjuntos cerrados?*

Un concepto útil, que no es usual encontrar siempre, es el siguiente.

Definición. *Dada una familia indexada de funciones*

$$f_i : X \to X_i$$

con $i \in I$, donde cada X_i es un espacio topológico. Decimos que τ una topología en X, es la ***topología inicial*** *de X con respecto a las funciones f_i, si es que es la más pequeña que hace que estas funciones sean todas continuas.*

De forma dual, si ahora tenemos una familia de funciones

$$g_i : Y_i \to Y,$$

*con $i \in I$. Decimos que σ una topología en Y, es la **topología final** de Y con respecto a las funciones g_i, si es la más grande que hace que sean todas continuos.*

Observación 1. *En la anterior definición, τ la topología inicial de X tiene como sub-base al conjunto*

$$B = \{f_i^{-1}(U) \ : \ U \text{ abierto en } X_i\}.$$

Es decir, que todo abierto en (X, τ) se puede escribir como la unión arbitraria de intersecciones finitas de elementos de B.

Por otro lado, σ la topología final de Y tiene como elementos a los subconjuntos V tal que $g_i^{-1}(V)$ es abierto en Y_i para todo $i \in I$.

Lema 0.2. *Dada una función $f : Z \to X$, donde Z es un espacio topológico, y X está armado de la topología inicial con respecto a una familia de funciones $f_i : X \to X_i$ con $i \in I$; entonces f es continuo si y solo si $f_i \circ f : Z \to X_i$ es continuo, para todo $i \in I$.*
Por otro lado, dada una función $g : Y \to Z$, donde Z es un espacio topológico, y Y está armado de la topología final con respecto a una familia de funciones $g_i : Y_i \to Y$ con $i \in I$; entonces g es continuo si y solo si $g \circ g_i : Y_i \to Z$ es continuo, para todo $i \in I$.

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 0.2.

- *Dado un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio topológico, entonces su topología de subespacio es justamente la topología inicial de A con respecto a la inclusión*

  $$i : A \to X,$$

  con $i(x) = x$ para todo $x \in A$.

- *Dado un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$ y su dual E^*, que también se escribe como $\mathrm{Hom}(E, \mathbb{R})$, se tiene que la topología débil de E (esta topología es muy usada en el análisis matemático y estudio de ecuaciones diferenciales parciales) es la topología inicial con respecto a todas las funciones $f \in E^* = \mathrm{Hom}(E, \mathbb{R})$.*

- *La topología producto de una familia indexada de espacios topológicos X_i es la topología inicial de $\prod_{i \in I} X_i$ con respecto de las proyecciones canónicas*

  $$p_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$$

  con $p_j(x) = x_j$.

Más adelante nos encontraremos con dos ejemplos de topologías finales, las cuales son importantes para construir los objetos usados, por ejemplo, en la topología algebraica.

Definición. *Dada una familia indexada de conjuntos $\{X_i\}_{i \in I}$, definimos su **unión disjunta** como el conjunto*

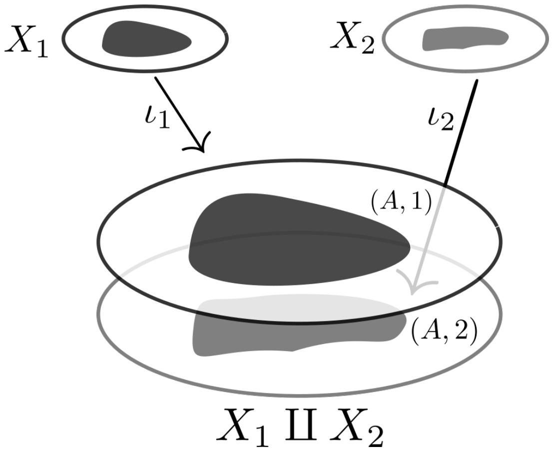
$$\coprod_{i \in I} X_i := \{(x, i) \ : i \in I, \, x \in X_i\}.$$

Si cada X_i es un espacio topológico, podemos definir una topología en su unión disjunta de la siguiente manera:

Para cada $j \in I$, existe una aplicación $\iota_j : X_j \to \coprod_{i \in I} X_i$ definida por $\iota_j(x) = (x, j)$, para todo $x \in X_j$.

Estas funciones son inyectivas y serán conocidas como ***inyecciones canónicas****. La* ***topología de unión disjunta*** *es la topología final en $\coprod_{i \in I} X_i$ con respecto a las proyecciones canónicas ι_i. Esto quiere decir que $A \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$ es abierto si y solamente si $\iota_j^{-1}(A)$ es abierto en X_j para todo $j \in I$.*

Observación 2. *Dado cualquier punto $y = (x, j) \in \coprod_{i \in I} X_i$, podemos pensar en j como una etiqueta que nos indica a donde pertenece x. Más aún, cada $A \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$ puede pensarse como la unión de conjuntos $(A, i) := \{(x, i) \ : \ x \in A\}$, los cuales son imágenes isomorfas a través de las inyecciones canónicas de conjuntos en cada X_i.*



Aquí tenemos la unión disjunta de dos espacios topológicos, A es todo el área sombreada en $X_1 \amalg X_2$ y se puede ver como se descompone en dos partes $(A, 1)$ y $(A, 2)$ que son isomorfas, correspondientemente, a conjuntos en cada espacio topológico que formó la unión disjunta.

Teorema 0.3 (Algunas propiedades útiles de la unión disjunta)**.**

- *Toda inyección canónica ι_i es una incrustación topológica.*
- *Si todo X_i es Haussdorf entonces también lo es su unión disjunta.*
- *Si todo X_i es primero contable, entonces también lo es su unión disjunta.*

Definición. *Dado un espacio topológico X, un conjunto Y y una función sobreyectiva $q : X \to Y$, construimos la* ***topología cociente de** Y **inducida por*** *q como la topología final con respecto a q. Es decir que U es abierto en Y si y solo si $q^{-1}(U)$ es abierto en X.*

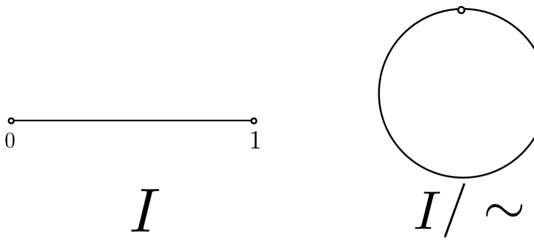
Una función $f : X \to Y$ se dice cociente si Y está armado de la topología cociente inducida por f.

Es usual que la función q en la topología cociente, se construya de la siguiente manera:

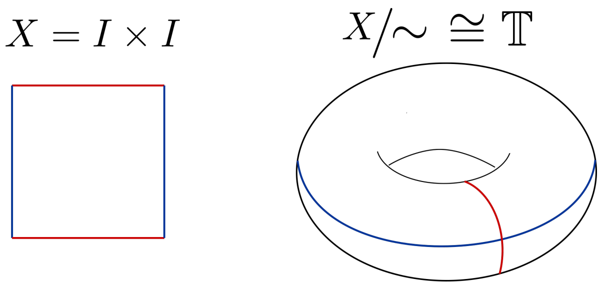
Tomamos una relación de equivalencia $\sim$ en X y consideramos $Y = X/\sim$, el conjunto cociente de X por $\sim$. Sea ahora $q : X \to Y$ la proyección canónica $x \mapsto [x]$ donde $[x]$ es la clase de equivalencia del elemento x. Así, Y armado de la topología cociente también es conocido como el **espacio cociente** (o **espacio de identificación**) de X, determinado por $\sim$.

La relación de equivalencia $\sim$ intuitivamente nos dice qué elementos de X queremos asociar o "identificar".

Ejemplo 0.4. *Consideremos el intervalo $I = [0,1]$, podemos construir el circulo $\mathbb{S}^1$ identificando los extremos de I por medio de una relación de equivalencia. Asi, si $\sim$ es la relación de equivalencia en que I tal que $x \sim x$ para todo $x \in I$ y adicionalmente $0 \sim 1$, entonces se puede probar que $I/\sim$ con la topología cociente es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.*

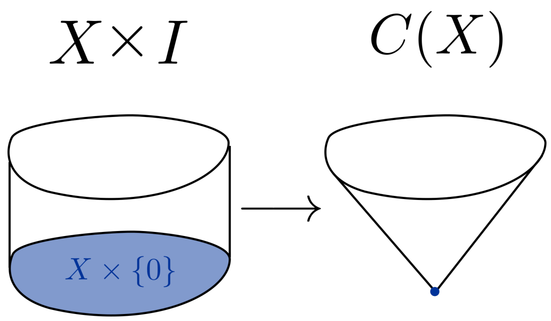


Por otro lado si consideramos un cuadrado $X = I \times I$ podemos construir un toroide identificando los lados horizontales y verticales, sin cambiar la orientación, para ello definimos nuestra relación de equivalencia $\sim$ como $p \sim p$ para todo $p \in X$, $(x,0) \sim (x,1)$ y $(0,x) \sim (1,x)$ para todo $x \in I$. Luego $X/\sim$ será homeomorfo al toroide $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$.



Ejemplo 0.5. *Sea X un espacio topológico, y A un subconjunto de X, entonces se define una relación de equivalencia como $x \sim x$ para todo $x \in X$ y $a_1 \sim a_2$ para todo $a_1, a_2 \in A$. Entonces $X/\sim$ es conocido como el espacio obtenido al* ***colapsar*** *A* ***en un punto*** *y se lo nota también como X/A.*

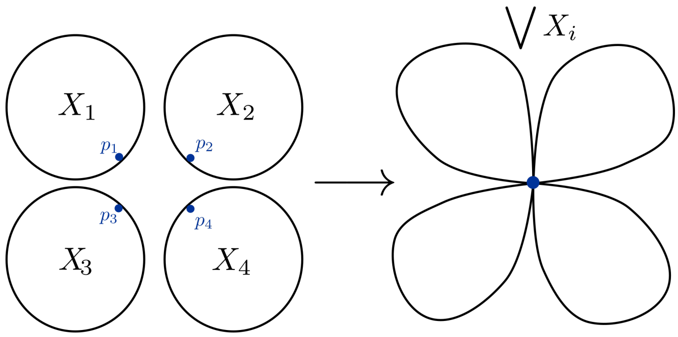
Un caso particular importante es el espacio $(X \times I)/(X \times \{0\})$ conocido como el ***cono en*** *X, notado como $C(X)$*



Ejemplo 0.6. *Dada una familia $(X_i)_{i \in I}$ de conjuntos, en donde distinguimos un punto $p_i \in X_i$ para cada índice, consideramos:*

$$\bigvee_{i \in I} X_i := \left(\coprod_{i \in I} X_i \right) / P$$

*donde $P = \{p_i\}_{i\in I}$ es el conjunto compuesto por todos los puntos distinguidos. Al conjunto resultante lo llamamos **Suma Wedge** (o también **bouquet**) de la familia $(X_i)_{i\in I}$. La idea es que consideramos todos los conjuntos X_i a la vez por medio de la unión disjunta y a todos sus puntos distinguidos los colapsamos en uno solo.*



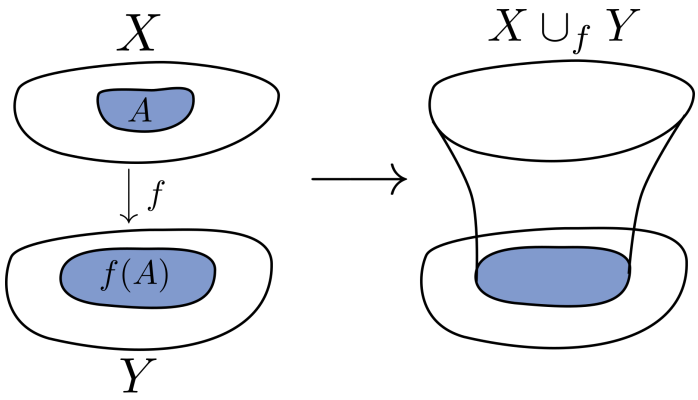
Un bouquet de una familia de círculos

Esta construcción también está relacionada con la siguiente.

Definición. *Sean X, Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ un subespacio cerrado de Y y $f : A \to X$ una función continua. Entonces definimos*

$$X \cup_f Y := (X \amalg Y)/\sim$$

*donde $\sim$ es la relación de equivalencia determinada por $a \sim f(a)$ para todo $a \in A$. Este espacio lo llamaremos **espacio de adjunción** y se dirá que se forma **adjuntando Y a X a lo largo de f**. La función f se conoce como el mapa de adjunción.*



Observación 3. *Si es que A es un punto distinguido de X, entonces $X \cup_f Y$ coincide con la suma wedge $X \bigvee Y$. Si, en cambio, $A = \varnothing$ entonces $X \cup_f Y = X \amalg Y$.*

1. El grupo fundamental

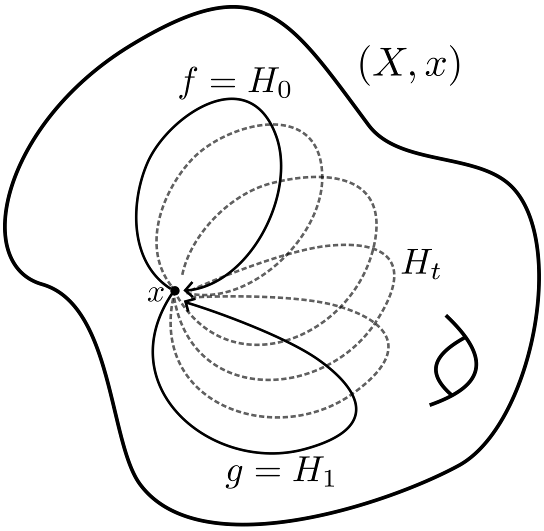
Consideremos un espacio topológico X en donde distinguimos un punto $x \in X$. Esto lo notamos como (X, x) y consideramos el intervalo $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, visto como espacio topológico, en donde distinguimos *dos* puntos: los extremos 0 y 1. Para nosotros un **lazo en** X será una función continua $f : I \to X$ que preserva los puntos distinguidos, esto es, $f(0) = f(1) = x$. En el conjunto de todos los lazos en X, al cual notamos por $\gamma(X, x)$, definimos una relación de homotopía que preserve los puntos, esto significa que

$$f \sim g \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Existe } H : I \times I \to X & \text{función continua, tal que} \\ H(t,0) = f(t) \text{ y } H(t,1) = g(t) & \text{para todo } t \in I \text{ y, además} \\ H(0,t) = H(1,t) = x & \text{para todo } t \in I. \end{cases}$$

A la función H se le conoce como homotopía de f a g.

Ejercicio 1.1. *Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia. Pista: Notar que $f \sim f$ usando la homotopía $H(t_1, t_2) = f(t_1)$ para todo $t_1, t_2 \in I$. Si $f \sim g$ con la homotopía H, entonces se define una homotopía G, de g a f, con $G(t_1, t_2) = H(t_1, 1 - t_2)$ Así $g \sim f$. ¿Cómo se podría probar la propiedad transitiva?*

Diremos que f es equivalente homotópicamente a g. Escribimos $H_t := H(-, t)$. Así tenemos que $H_0 = f$ y $H_1 = g$. Es claro que las funciones H_t , con $0 < t < 1$, son todos lazos en X.



Podemos pensar en la homotopía H como una deformación continua de un lazo a otro.

El siguiente paso para nuestra construccíon es definir una estructura de grupo en el conjunto de las clases de equivalencia $\gamma(X, x)/\sim$. A este grupo se le llamará **grupo fundamental**, con la notación $\pi_1(X, x)$, para denotar que sigue dependiendo del punto distinguido x.

Para esto primero creamos una operación entre dos lazos f, g llamada **concatenación** o **producto** y notada por $f * g$, el cual es el lazo $h : I \to X$ definido como

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2s - 1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Esta función es continua ya que $f(1) = x = g(0)$ y usamos el lema de pegado.

Por lo anterior, podemos definir una operación en las clases de equivalencia:

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Ejercicio 1.2. *Demostrar que si $f \sim f'$ y $g \sim g'$ entonces $f * g \sim f' * g'$. Esto nos permite concluir que la anterior operación está bien definida.*

Pista: Considere que, si F es la homotopía entre f y f', G lo es para g y g', entonces se puede definir

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ G(2s-1,t) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

y comprobar que es la homotopía requerida entre $f * g$ y $f' * g'$. Por tanto, $*$ es tambíen una operación para las clases de equivalencia

Ejercicio 1.3. *Compruebe que $\pi_1(X,x)$ es un grupo con la operación $*$, para esto pruebe que es una operación asociativa, que tiene identidad y todo elemento tiene inverso.*

Pista: La identidad en este contexto será la clase $[e_x]$ donde $e_x(t) = x$ para todo $t \in I$, es decir es el lazo constante. Por otro lado, dado una clase $[f]$ con representante f entonces su inverso será $[\overline{f}]$ donde $\overline{f}(t) = f(1-t)$ para todo $t \in I$.

Observación 4. *En general, la operación concatenación $*$ está definida para todo par de funciones continuas $f, g : I \to X$ tales que $f(1) = g(0)$. Gracias al lema de pegado, $f * g$ será una función continua $I \to X$.*

Lema 1.1. *En un espacio topológico arco-conexo X se tiene que $\pi_1(X,x) \cong \pi_1(X,y)$ para todo $x, y \in X$.*

Demostración. (Esbozo) Sean x, y puntos cualesquiera entonces. Como X es arco-conexo, sabemos que existe una función continua $h : I \to X$ tal que $h(0) = x$ y $h(1) = y$ (más aún, esta función es un homeomorfismo en su imagen). Definimos la función:

$$\hat{h} : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$$

$$[f] \mapsto [h * f * \overline{h}]$$

donde $\overline{h}(t) = h(1-t)$. Esta operación está bien definida gracias a que $*$ lo está, es un homomorfismo y tiene como inversa a $\hat{\overline{h}}$. □

Es usual encontrarse con la terminología $\pi_1(X)$ sin tomar en cuenta el punto distinguido. Es importante notar que esta elección sí importa, cuando nos encontremos con esto lo más probable es que en el contexto se asuma que X es arco-conexo, ya que por el lema anterior, en ese caso el grupo fundamental es único, salvo isomorfismo.

Si es que además, el grupo fundamental es el trivial (este implica que todo lazo en X es homotópicamente equivalente a un punto o lazo contstante) entonces se lo dirá **simplemente conexo**.

La idea principal para estudiar el grupo fundamental de un espacio topológico es que nos ayuda en una de las tareas más importantes de la topología:

Dados dos espacios topológicos X y Y, deducir si son homeomorfos o no.

Aunque parezca sencillo probar que dos espacios topológicos son homeomorfos, en la práctica esto puede ser muy complicado. Por ejemplo, es de esta naturaleza la famosa conjetura de Poincaré (probada después de alrededor de 100 años de su formulación, en 2003, por Grigori Perelman):

Toda 3-variedad cerrada simplemente conexa es homeomorfa a $\mathbb{S}^3$

Es de hecho, Poincaré en 1894 quien establece primero la noción de grupo fundamental. La razón del interés es que es un **invariante** topológico, en el sentido de que:

Lema 1.2. *Si dos espacios arco-conexos son homeomorfos entonces sus grupos fundamentales serán isomorfos*

Así, si calculamos los grupos fundamentales de dos espacios topológicos y no son isomorfos (esto es casi siempre, más sencillo), podemos deducir que los espacios no son homeomorfos. En la lección 3 veremos que este resultado es solo un caso particular de otro más general y que demuestra, en la sencillez de su demostración, el poder y expresividad de la teoría de categorías.

Por otro lado, debemos resaltar el carácter innovador del grupo fundamental, pues asigna a cada espacio una estructura algebraica, algo que a primera vista no tiene nada que ver con su topología.

Por último, el índice en la notación $\pi_1(X)$ denota que este no es más que el primer puente de varias construcciones entre la topología y el álgebra, como son los grupos de homotopía, homología y cohomología. En particular, $\pi_1(X)$ es conocido como el primer grupo de homotopía.